Autorzy: Andrzej Jabłoński, Tomasz Palewski
Korekta: Alicja Bakalarz

ZASADY OBLICZEŃ

Jednostki SI

Układ SI oparty jest na siedmiu wielkościach podstawowych i dwóch uzupełniających. Dla każdej z tych wielkości przyjęto jedną jednostkę. Układ SI pokazano w tabeli l.

Tabela l. Układ jednostek SI

Wielkości	**Zalecane oznaczenia wielkości**	**Jednostki miar**	**Oznaczenia jednostek**
Podstawowe			
długość	l	metr	m
masa	m	kilogram	kg
czas	t	sekunda	s
natężenie prądu elektrycznego	I	amper	A
temperatura	T	kelwin	K
światłość	J	kandela	cd
liczność materii	n	mol	mol
Uzupełniające			
kąt płaski		radian	rad
kąt bryłowy		steradian	sr

Wszystkie inne wielkości fizyczne można zdefiniować za pomocą wielkości podstawowych. Podstawiając do wzoru definiującego daną wielkość fizyczną, zamiast wielkości podstawowych, odpowiadające im jednostki podstawowe i opuszczając występujące we wzorze współczynniki liczbowe, uzyskuje się jednostkę danej wielkości fizycznej. Tak uzyskane jednostki pochodne wraz z jednostkami podstawowymi nazywa się jednostkami głównymi. Niektóre jednostki pochodne, poza symbolami utworzonymi z symboli jednostek podstawowych, uzyskały osobne nazwy, np. kulomb ($C = A\cdot s$), dżul ($J= m^2\cdot kg\cdot s^{-2}$), paskal ($Pa = N\cdot m^{-2} = kg\cdot m\cdot^{-1}\cdot s^{-2}$).

Oprócz głównych jednostek miar, układ SI dopuszcza stosowanie jednostek krotnych (wielokrotnych i podwielokrotnych). W celu utworzenia jednostki krotnej stosuje się odpowiednie przedrostki (tabela 2).

Przedrostki nie będące wielokrotnością trzeciej potęgi (h, da, c) należy stosować tylko dla tych jednostek, dla których są dotychczas w użyciu, np. można używać jednostkę dm (decymetr) ale nie należy używać jednostki hm (hektometr). Układ SI przyjmuje zasadę, że jednostki krotne nie mogą mieć własnych nazw, takich jak dawniej stosowany angsztrem, mikron itp., a ich nazwy tworzone są za pomocą tylko jednego przedrostka, np. dawny milimikron (10^{-9} m) – to w układzie SI nie milimikrometr, lecz nanometr (tabela 3). Dlatego też krotność jednostki masy tworzy się nietypowo, nie od kg, lecz od g, a więc l000 kg to nie kkg (kilokilogram) lecz Mg (megagram). W wypadku jednostek pochodnych zaleca się stosowanie krotności jedynie w liczniku, a więc np. jako jednostkę 1000-krotnie większą od kg/m^3 lepiej jest używać nie $kg/dm^3 = g/cm^3$ lecz Mg/m^3.

Tabela 2. Nazwy i oznaczenia przedrostków (jednostek krotnych)

Przedrostek	**Znaczenie**	**Oznaczenie**
eksa	10^{18}	E
peta	10^{15}	P
tera	10^{12}	T
giga	10^{9}	G
mega	10^{6}	M
kilo	10^{3}	k
hekto	10^{2}	h
deka	10^{1}	da
decy	10^{-1}	d
centy	10^{-2}	c
mili	10^{-3}	m
mikro	10^{-6}	μ
nano	10^{-9}	n
piko	10^{-12}	p
femto	10^{-15}	f
atto	10^{-18}	a

Tabela 3. Przeliczenie niektórych jednostek dawniej stosowanych na jednostki SI

angsztrem	l Å = 0,1 nm
litr	l l = l dm^3
atmosfera fizyczna	l atm = 101325 Pa (dokładnie)
milimetr słupa rtęci	l mmHg = 133,322 Pa
stopień Celsjusza	L °C = l K. t (°C) = T(K) - 273,15
kaloria	l cal = 4,1868 J (dokładnie)

Jak podano już w tabeli l wielkością opisująca ilość materii jest liczność materii, a jej jednostką jest mol. Mol definiuje się jako liczność materii występującą gdy liczba cząstek (cząstek, atomów, jonów itp.) jest równa liczbie atomów zawartych w 0,012 kg (dokładnie) nuklidu ^{12}C. To znaczy, że mol jest jednostką tego samego typu, co tuzin czy kopa i jest równoznaczny z terminem liczba Avogadro. Masa mola różnych substancji jest różna i np. jeden mol siarki ma masę 32 g a główną jednostką masy molowej jest kg/mol. Należy przy tym zwrócić uwagę, ze podobnie brzmiące pojęcia masa atomowa i masa cząsteczkową są wielkościami bezwymiarowymi (względnymi), które są określone następująco: masa atomowa (cząsteczkowa) jest to stosunek średniej masy atomu danego pierwiastka (cząsteczki danego związku) do 1/12 (dokładnie) masy atomu nuklidu ^{12}C.

Na przykład masa atomowa cynku wynosi:
$(1{,}085 \cdot 10^{-25}$ kg$) / (1{,}660 \cdot 10^{-27})$ kg $= 65{,}37$.

Dokładność obliczeń

Nauki takie jak fizyka czy chemia zajmują się ilościowymi zależnościami między różnymi wielkościami fizycznymi. Wartość określonej wielkości jest iloczynem liczby przez odpowiednią jednostkę miary (np. 5 $kmol/m^3$). Wartości liczbowe uzyskuje się z pomiarów. Pomiary wielkości fizycznych są wykonane z pewną skończoną dokładnością. Celem poprawnego pomiaru jest ustalenie przedziału, wewnątrz którego znajduje się rzeczywista wartość. W wyniku pomiaru otrzymuje się wartość wielkości fizycznej (*w*), obarczoną pewnym błędem bezwzględnym, co zapisuje się następująco:

$$w=2{,}37 \pm 0{,}03 \text{ lub ogólnie } w = M \pm F.$$

Często danej wielkości fizycznej nie mierzy się bezpośrednio, lecz jej wartość oblicza się z wartości kilku innych wielkości fizycznych. W takim przypadku należy, korzystając ze znanych granic dokładności pierwotnych wartości, określić błąd wartości obliczonej. A zatem:

A. Jeżeli F jest maksymalnym błędem wartości M, to:
l) maksymalny błąd sumy różnicy kilku wartości jest sumą błędów poszczególnych wartości:

$$a - b + c = M_a - M_b + M_c \pm (F_a + F_b + F_c),$$

a błąd względny F/M sumy jest zawarty między najmniejszym a największym błędem względnym F_i/M_i, poszczególnych składników

2) błąd względny iloczynu lub ilorazu kilku wartości jest równy sumie błędów względnych poszczególnych czynników, stąd wynika, że:

$$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{M_a \cdot M_b}{M_c} \pm \frac{M_a \cdot M_b}{M_c}\left(\frac{F_a}{M_a} + \frac{F_b}{M_b} + \frac{F_c}{M_c}\right)$$

$$a^n = M_a^n \pm M_a^n \cdot n \cdot \frac{F_a}{M_a}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{M_a} \pm \sqrt[n]{M_a}\,\frac{1}{n}\frac{M_a}{M_b}$$

B. Jeżeli M jest wartością średnią, uzyskaną z n pomiarów, natomiast F jest średnim błędem wartości średniej obliczonym ze wzoru:

$$F = \sqrt{\frac{\sum_i f_i^2}{n(n-1)}},$$

gdzie f jest różnicą między M a wynikiem i-tego pomiaru, to można przyjąć, że;

1 . $$a - b + c = M_a - M_b + M_c \pm (F_a^2 + F_b^2 + F_c^2)$$

2. $$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{M_a \cdot M_b}{M_c} \pm \frac{M_a \cdot M_b}{M_c}\sqrt{\frac{F_a^2}{M_a^2} + \frac{F_b^2}{M_b^2} + \frac{F_c^2}{M_c^2}}.$$

Ze względu na uciążliwość zapisu wartości liczbowych z podawaniem ich błędu można stosować zapis uproszczony, zakładając, że ostatnia zapisana cyfra jest niepewna w granicach ±1. Jeżeli takie uproszenie jest dla podającego wynik nie do przyjęcia należy wtedy podać zarówno wartość średnią jak i błąd.

Aby błąd wartości uzyskanej z obliczeń był zgodny z błędem wynikającym z błędów danych wyjściowych, trzeba przy wykonywaniu rachunków stosować pewne zasady oparte na pojęciu cyfry znaczącej. Cyfry znaczące są to wszystkie cyfry, począwszy od pierwszej nie będącej zerem do ostatniej zapisanej po przecinku. Np. liczba 0,0130070 ma 6 cyfr znaczących. W przypadku gdy liczba nie ma cyfr po przecinku, końcowe zera nie muszą być cyframi znaczącymi i dlatego np. liczbę 13700 należy zapisywać: $1.37\cdot10^4$ (3 cyfry znaczące), $1,370\cdot10^4$ (4 cyfry znaczące) lub $1,3700\cdot10^4$ (5 cyfr znaczących).

l. Przy mnożeniu i dzieleniu wartości liczbowych należy zachować w wyniku tyle cyfr znaczących, ile jest ich w tej wartości, która ma najmniejszą liczbę cyfr znaczących, np.: $W = 2,7\cdot1,34 \approx 3,618$, $W = 3,6$, ale $2,700\cdot1,34 =3,62$. Podobnie, przy podnoszeniu do potęgi i wyciąganiu pierwiastka z wartości liczbowej, w wyniku należy zachować tyle cyfr znaczących, ile ich ma dana wartość.

2. Przy dodawaniu i odejmowaniu błędy mogą się sumować, ale mogą się również wzajemnie kompensować. Przy dodawaniu niewielu liczb (np. dwóch) dla uproszczenia obliczeń zwykle przyjmuje się, że dokładność wyniku jest taka sama jak najmniej dokładnego składnika sumy, a za taki przyjmuje się liczbę, która ma mniej miejsc po przecinku. Na przykład 2,7 jest przy dodawaniu mniej dokładną liczbą niż 0,027, liczba 22,7 jest mniej dokładną od 22,700, a liczba $1,37\cdot10^3$, czyli 1370, jest mniej dokładną niż 18,1.

W przypadku liczb całkowitych bez miejsc dziesiętnych liczba mniej dokładna ma ostatnią cyfrę nie będącą zerem położoną najbardziej w lewo w stosunku do jedności. Na przykład liczba $1,37\cdot10^3$, czyli 1370, czyli 1370±10, jest mniej dokładną niż 18.

Przykłady:

a = 22,752 + 38,2737 + 3,34 ~ 64,3657,	a = 64,37,
b = 283,4 + 0,003 ~ 283,403,	b = 283,4,
c = 7,382 – 7,38 ~ 0,002,	c = 0,00.

3. Logarytmy liczb o 2 lub więcej cyfrach znaczących mają mantysy o takiej samej ilości cyfr znaczących co liczba logarytmowana a dokładność mantysy wynosi ±4 na ostatniej cyfrze znaczącej. Na przykład:

$\log 0,20 = -1,70$,
$\log 2,00\cdot10^{21} = 21,301$.

4. We wszystkich obliczeniach pośrednich należy zachować o jedną cyfrę znaczącą więcej, niż to wynika z reguł podanych w punktach 1-3. Np. $2,7\cdot1,34 \sim 3,618$ do dalszych obliczeń należy wziąć liczbę 3,62 a nie 3,6 lecz ostateczny wynik zaokrąglić do dwóch cyfr znaczących.

5. Przy zaokrągleniu wyników obliczeń do liczby cyfr wynikającej z dokładności danych stosuje się następujące reguły:

a) jeżeli zaokrąglana końcówka ma cyfrę od 0 do 4, lub od 0 do 49 lub od 0 do 499 itd., to się je odrzuca. Przykładowo, zaokrąglając liczbę 4,62 do dwóch cyfr znaczących otrzymamy 4,6 a liczbę 6,732 do dwóch cyfr znaczących podajemy ją jako równą 6,7 bo zaokrąglana końcówka w liczbie 6,732 to 32 i jest ona mniejsza od 49

b) przy odrzucanej końcówce, zaczynającej się od cyfr 6,7,8 lub 9 (lub od 51 do 99, czy też od 501 do 999 itd.) ostatnią cyfrę pozostającą powiększa się o l np. 6,753 = 6,8

c) jeżeli odrzuconą końcówką jest cyfra 5 lub cyfra 5 po której są same zera, pozostająca cyfra powinna być parzysta, np. 6,650 = 6,6 ale 6,75 = 6,8

6. W obliczeniach, w których dane wyjściowe mają bardzo dużą dokładność, należy przed wykonaniem działań zaokrąglić wyjściowe wartości liczbowe tak, aby miały najwyżej o jedną cyfrę znaczącą więcej (przy dzieleniu lub mnożeniu) lub o jedno miejsce dziesiętne więcej (przy odejmowaniu lub dodawaniu), niż najmniej dokładna wartość.

Należy przy tym pamiętać, że dokładność otrzymanego wyniku zależy nie tylko od dokładności danych wyjściowych i użytych stałych fizycznych, lecz często także od dokładności zastosowanych praw fizycznych, i tak: prawo $pV = n\mathrm{R}T$ nie jest prawdziwe z dowolną dokładnością dla gazów rzeczywistych.

Wykonaj następujące zadania

1. Ile jest cyfr znaczących w następujących liczbach
a) 12,010; b) l = 0,50 cm; c) (37,82 ± 0,04)%;
d) 22,990; e) 3,0%; f) m = 0,0563 g; g) stała Faradaya = 96500±10 C.

2. Zaokrąglić następujące liczby do dwóch cyfr znaczących
a) 237,2; b) 0,505; c) $1{,}342\cdot10^{-5}$.

3. Zaokrąglić następujące liczby do trzech cyfr znaczących
a) 145,11; b) 8945,71; c) 7,3986; d) 0,05557; e) 3,835.

4. Zaokrąglić następujące liczby, zostawiając tylko dwie cyfry po przecinku
a) 3645; b) 3,655; c) 0,0747; d) 0,0087; e) 0,0043.

5. Obliczyć iloczyny:
a = 2,53· 32,82 · 48,14; b = 24,02· 0,00450· 1,855; c = 682· 0,22531· 32,55.

Obliczyć granicę dokładności wyników przy najmniej korzystnym ułożeniu się błędów poszczególnych wartości.

6. Obliczyć sumy:

a = 34,52 + 0,0845 + 5,3427; b = 1,304 + 31,22 + 6,32;

c = $(1{,}276\cdot0{,}004730) - 2{,}84\cdot10^{-4} + (0{,}0021\cdot0{,}012)$;

d = $(1{,}276\cdot0{,}000473)-2{,}84\cdot10^{-4} +(0{,}021764\cdot0{,}01213)$.

7. Obliczyć wartość liczbową wyrażenia:

$w = \{0{,}522\cdot(63{,}4 +3{,}29)/(344{,}5 - 340{,}1)\}$

8. Znaleźć logarytmy liczb: 2; 20; 300; 0,5; 0,0103 i 98,7 i określić jakie są rzeczywiste granice dokładności powyższych logarytmów, wynikające z granic dokładności liczb logarytmowanych.